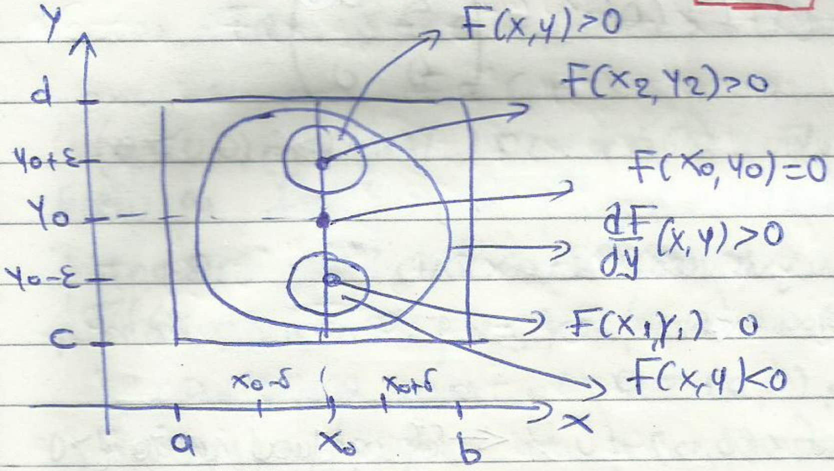
ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Απλούστερη περίπτωση: $(n=m=1)$

Έστω $F:(a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ με
$F\in C^1((a,b)\times(c,d))$
$(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$ με $F(x_0,y_0)=0$
και $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\exists\, \delta,\varepsilon>0): \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$
θα $\exists$ μια μοναδική $(!)$ $g(x)\in(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\subset(c,d)$:
: $F(x,g(x))=0$ και η $g:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$
είναι συνεχώς διαφορίσιμη και με $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\neq 0$
καθώς και:

$$\boxed{g'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))},\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}$$



Πως προκύπτει ο τελευταίος τύπος;

Έστω $G(x)=\begin{pmatrix}x\\ g(x)\end{pmatrix}$ με $g:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$

Τότε:

$$F(x,g(x))=F(G(x))=(F\circ G)(x)=0 \quad (1)$$

$$F'(x,g(x))=D(F\circ g)(x)=DF(G(x))\cdot DG(x)=$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(G(x)),\ \frac{\partial F}{\partial y}(G(x))\right)\cdot(1,g'(x))^T=$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)\cdot(1,g'(x))^T=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))+g'(x)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))$$

(1) $F(x, g(x)) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x}(F \circ G)(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + g'(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = -\frac{\partial F/\partial x\,(x, g(x))}{\partial F/\partial y\,(x, g(x))}.$$

Παρατήρηση

Η συνάρτηση g του Θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης για την οποία $F(x, g(x)) = 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ λέμε ότι ορίζεται πεπλεγμένα, αφού προκύπτει από την "επίλυση" της $F(x,y) = 0$ ως προς y.

Παράδειγμα (ΓΕΝΙΚΟ)

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $c \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}_f(c) = \{(x,y) \in U : f(x,y) = c\} \neq \emptyset$. Τότε, εάν $(x_0, y_0) \in \mathcal{L}_f(c)$ και $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, μπορούμε να περιγράψουμε ένα τμήμα της καμπύλης στάθμης $\mathcal{L}_f(c)$, γύρω από το (x_0, y_0) μέσω μιας ρητά δοσμένης συνάρτησης. Δηλαδή

- αν $F(x,y) = f(x,y) - c$ τότε έχουμε $F(x_0, y_0) = 0$
- και αν $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ τότε από το Θεώρημα: $\exists\, I_1 \times I_2 \subset U$ με $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ και $\varphi \in C^1(I_1)$ έτσι ώστε: $\mathcal{L}_f(c) \cap I_1 \times I_2 = \{(x,y) \in I_1 \times I_2 : y = \varphi(x)\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΙΔΙΚΟ)

Έστω $f(x,y) = x^2 + y^2$, $c > 0$ $\quad \mathcal{L}_f(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$

και για $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{c})$ έχουμε

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, \sqrt{c}) = 2\sqrt{c} > 0$

και άρα $(\exists \delta > 0)(\forall x \in (-\delta, \delta))$: $y = \varphi(x) = \sqrt{c - x^2}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ)

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό και

$F = (F_1, \ldots, F_m)^T : U \times V \to \mathbb{R}^m$ συνεχώς διαφορίσιμη

και $(x_0, y_0) \in U \times V$ με $F(x_0, y_0) = 0$ και

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial (y_1, \ldots, y_m)} = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial y_1 \ldots \partial F_1/\partial y_m \\ \partial F_m/\partial y_1 \ldots \partial F_m/\partial y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

αντιστρέψιμος

Τότε θα $(\exists\, \delta, \varepsilon > 0), (\forall x \in B(x_0, \delta) \subseteq U)(\exists g(x) \in B(y_0, \varepsilon) \subset V)$:

: $F(x, g(x)) = 0$, $g : B(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \to B(y_0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^m$

συνεχώς διαφορίσιμη και $Dg(x)$ είναι:

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

$\forall x \in B(x_0, \delta)$.

ΑΣΚΗΣΗ

ΝΔΟ για $x \in \mathbb{R}$ κοντά στο $x_0 = 0$ υπάρχουν μοναδικές λύσεις $y(x)$ της εξίσωσης:

$$e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1 = 0$$

και να υπολογίσετε το $y'(x_0) = y'(0)$

ΛΥΣΗ

- Έστω $F(x,y) = e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Έχουμε, ότι $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, όπου:

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,y), \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\right) =$$

$$= \left(y e^{\sin(xy)} \cos(xy) + 2x,\ x e^{\sin(xy)} \cos(xy) - 2\right)$$

Επίσης, $F(0,0) = 0$ (δηλ. $y(0) = 0 = y_0$)

(Άρα, έχουμε $F(x_0, y_0) = 0$)

- Καθώς, πρέπει μια άλλη προϋπόθεση:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$$

Άρα, από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης $(\exists \delta > 0)(\forall x \in (-\delta, \delta))(\exists!\, y(x) \in \mathbb{R})$ με $F(x, y(x)) = 0$ και $y \in C^1(-\delta, \delta)$ ισχύει:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \overset{x = x_0 = 0}{\Longrightarrow} y'(0) = -\frac{0}{-2} = 0.$$